Universitätsbibliothek
Heidelberg

# Karl Wilhelm von Feuerbach

von

**Moritz Cantor**
in Heidelberg

Eingegangen am 15. Oktober 1910

Heidelberg 1910
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Neu herausgegegeben von **Gabriele Dörflinger**,
Universitätsbibliothek Heidelberg, 2010.

**Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte**

**Moritz Cantor**
∗ 23. August 1829 in Mannheim
† 9. April 1920 in Heidelberg

Die Biographie erschien als 25. Abhandlung des Jahrgangs 1910 der

*Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse*

Wenn auch der sogenannte *Feuerbachsche Kreis* oder, wie man eben so häufig sagt, der *Neunpunktekreis* ein jedem Mathematiker bekanntes geometrisches Gebilde ist, so dürfte doch mit dieser Kenntnis so ziemlich erschöpft sein, was man von *Karl Wilhelm Feuerbach* zu sagen weiß.

In der 1877 im VI. Band der Allg. Deutschen Biogr., S. 747, erschienenen kurzen Notiz, welche auf Poggendorffs Biograph. literar. Handwörterb. zur Gesch. der exakten Wissensch., Bd. I, S. 742 (Leipzig 1863), sich stützt, dem selbst das Konversationslexikon als Quelle diente, wußte ich wenigstens kaum mehr mitzuteilen. Ich gab an, Karl Wilhelm F. sei als zweiter Sohn des berühmten Kriminalisten *Anselm von Feuerbach* am 30. Mai 1800 in Jena geboren, sei als Professor der Mathematik am Gymnasium zu Erlangen am 12. März 1834 gestorben. Von den Brüdern Feuerbachs seien hier erwähnt der älteste, *Joseph Anselm* (1798–1851), ein fein gebildeter Philologe und Archäologe, Vater des genialen Malers *Anselm F.*; der dritte Bruder, *Eduard August* (1803–1843), Professor des Deutschen Privatrechts; der vierte Bruder, *Ludwig Andreas* (1804 bis 1872), bekannt als auf Hegelschen Bahnen wandelnder, viel angefeindeter Philosoph. Von Karl Wilhelms Schriften hatte ich 1877 noch keine zu Gesicht bekommen, ich konnte daher nicht näher darüber berichten. Inzwischen hat sich dieses geändert. Die älteste Druckschrift von 1822 besitze ich selbst, spätere konnte ich aus der Universitätsbibliothek in Heidelberg und aus der Hof- und Staatsbibliothek in München erhalten, endlich hat mir Herr Generaloberarzt a. D. *Anselm Feuerbach* in München, der Sohn des vorgenannten *Eduard August F.*, in freundlichster Weise ein ihm gehörendes Manuskript zur Verfügung gestellt, über welches ich berichten darf. Ich glaube künftigen Geschichtsschreibern der Mathematik des XIX. Jahrhunderts einen kleinen Dienst zu erweisen, wenn ich meine Lesefrüchte hier zusammenstelle.

Zunächst seien mir einige biographische Ergänzungen gestattet, welche vielleicht in Bälde durch eine Herausgabe von Briefen von Ludwig F., mit welcher ein jüngerer Gelehrter sich beschäftigt, weitere Vervollständigung erhalten können. Der Vater war bekanntlich zuletzt Präsident des Appellationsgerichtes in Ansbach. Sämtliche Söhne besuchten das dortige Gymnasium, und von dort aus bezog Karl gleichzeitig mit dem älteren Bruder Anselm 1818 die Universität Erlangen. Im Jahre 1820 siedelte Karl nach Freiburg im Breisgau über. Vielleicht veranlaßte ihn dazu der Umstand, daß Professor Buzengeiger (Allgem. Deutsche Biogr. III, 678), der frühere Mathematiklehrer am Ansbacher Gymnasium, seit 1819 als Professor der Mathematik und der Mineralogie nach Freiburg berufen worden war. Schon 1823 finden wir Karl F. als Professor der Mathematik am Gymnasium in Erlangen. Er hatte ein Jahr früher seine Erstlingsschrift veröffentlicht, eine 62 Ouartseiten füllende Monographie unter dem Titel: *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren. Eine analytisch-trigonometrische Abhandlung von Karl Wil-*

*helm Feuerbach, der Philosophie Doktor. Mit einer Vorrede von* Karl Buzengeiger*, ordentlichem Professor der Mathematik an der Großherz. Badischen Universität zu Freiburg.* Nürnberg 1822, bei Riegel und Wiesner.

Ich behalte mir vor, auf den Inhalt dieser Schrift, welche ich „Die merkwürdigen Punkte" nennen werde, zurückzukommen, und fahre in der Lebensbeschreibung fort. Karl Feuerbach, ein erst 23jähriger Professor, verkehrte in Erlangen viel in burschenschaftlichen Kreisen und mag sich dort, wenn nicht schriftlich, doch mündlich, etwas unvorsichtig über die politischen Zustände in Deutschland geäußert haben, welche ganz gewiß keinem nur einigermaßen frei Denkenden gefallen konnten. Er wurde im Mai 1824 verhaftet, ein Los, welches er mit 20 anderen Jünglingen aus den angesehensten Familien teilte, und blieb 14 Monate gefangen, bis er etwa im Juni 1825 die Freiheit wieder erlangte. Aus dem Gefängnis entlassen, wurde er zwar wieder angestellt, aber nicht in Erlangen, sondern am Gymnasium in Hof, wo er, wie berichtet wird, bis 1827 verblieb. Ich kann die Richtigkeit dieser Angabe nicht prüfen, sicher aber ist, daß ein vollständig von Feuerbachs Hand geschriebenes Manuskript (es soll künftig kurzweg *das Manuskript* heißen) auf dem Umschlage das Datum: Ansbach, 7. Juli 1826, trägt, sowie daß eine 1827 in Nürnberg erschienene Druckschrift eine mit „Ansbach, den 22. Oktober 1826" datierte Vorrede besitzt. Der Titel dieser Druckschrift lautet: *Grundriß zu analytischen Untersuchungen der dreieckigen Pyramide von Dr. Karl Wilhelm Feuerbach, Professor der Mathematik.* Nürnberg 1827, in Kommission bei Riegel und Wiesner. $4^o$. 48 S. Diese Druckschrift soll kurzweg *der Grundriß* heißen. Endlich gibt es noch eine kleinere gedruckte Notiz, welche künftig *die Voranzeige* heißen mag. Sie findet, sich in dem Jahrgang 1826 der von Lorenz Oken in 32 Bänden (1817–1848) herausgegebenen Zeitschrift *Isis* in der Mitte des Jahrgangs, S. 565–569, und führt den Titel: *Einleitung zu dem Werke Analysis der dreyeckigen Pyramide durch die Methode der Coordinaten und Projectionen. Ein Beytrag zu der analytischen Geometrie von Dr. Carl Wilhelm Feuerbach, k. b. Prof. d. Math.* Mag nun F. während der Fertigstellung von Manuskript, Grundriß und Voranzeige in Hof oder in Ansbach oder abwechselnd in beiden Städten gelebt haben, jedenfalls war er etwa von 1828 an wieder Gymnasialprofessor in Erlangen, wo er bis zu seinem Tode blieb.

Nach diesen die Persönlichkeit von Karl Wilhelm Feuerbach betreffenden Mitteilungen wende ich mich zu seinen Schriften, und zwar zuerst zu: „Die merkwürdigen Punkte". Buzengeiger, der Lehrer Feuerbachs in Ansbach wie in Freiburg, hat ihnen eine 14 Seiten füllende Vorrede vorausgeschickt. Er bezweckte damit augenscheinlich, dem lieb gewordenen Schüler den Eintritt in die Öffentlichkeit zu erleichtern, vielleicht den Verleger durch diese Mitwirkung zu bestimmen, es mit dem noch ganz unbekannten Verfasser zu wagen. Auf Feuerbachs Ergebnisse nimmt Buzengeiger dabei kaum Rücksicht. Er schildert vielmehr in großen Zügen den Gang der Entwicklung, welchen die

Mathematik, die gleichzeitig eine Wissenschaft und eine Kunst sei, von den ältesten Zeiten bis zur Gegenwart genommen habe. Der heutige Leser wird sich das Datum der Vorrede, 16. März 1822, vor Augen halten müssen, wenn er die Sätze liest: „Und so ist man eben auf dem Punkt, gestehen zu müssen, daß man zwar keinen Begriff habe, wie die Mathematik noch eine Epoche haben könne, die in ihrer Wirkung einer der bisherigen gleiche; allein das war wohl immer der Fall, ehe eine neue eintrat“. Schwieriger, meint Buzengeiger, werde es von Epoche zu Epoche Neues hinzu zu erfinden, und nun kommt zum Schlusse ein Hinweis auf die nachfolgende Abhandlung. „Das ebene Dreieck ist die einfachste geometrische Figur, und von dem ersten Ursprung der Geometrie bis auf die jetzigen Zeiten haben die Geometer sich bestrebt, seine Eigenschaften zu erforschen, ohne diese Quelle erschöpfen zu können, wie eben diese Abhandlung zeigt, welche eine ziemliche Reihe der merkwürdigsten und schönsten hierher gehörigen Sätze enthält.“ Was davon neu, was nur in neuer Darstellung gegeben sei, verrät uns Buzengeiger nicht.

Feuerbachs Monographie zerfällt in folgende sechs Abschnitte:

I. Von den Mittelpunkten der Kreise, welche die drei Seiten eines Dreiecks berühren. S. 1–14.

II. Vom Durchschnittspunkte der Senkrechten, welche aus den Winkelpunkten eines Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten gefällt sind. S. 15–29.

III. Vom Mittelpunkte des Kreises, welcher um ein Dreieck beschrieben ist. S. 30–32.

IV. Bestimmung der gegenseitigen Lage der vornehmsten bisher betrachteten Punkte. S. 33–41.

V. Sätze, welche sich aus vergleichender Betrachtung und wechselseitiger Verbindung der bisher vorgetragenen ergeben. S. 41–57.

VI. Anhang von geometrischen Beweisen einiger bisher gefundenen Sätze. S. 58–62.

Bevor von dem Inhalte gesprochen werden kann, dürfte es erwünscht sein zu erfahren, welches fremde Material Feuerbach verarbeitet hat, und da begegnen uns insbesondere drei Zitate: Lazare Carnot, Géométrie de position von 1803, welche Feuerbach aber nicht im Original, sondern in der deutschen zweibändigen Übersetzung von Schumacher benutzte; Euler, Solutio facilis problematum quorundam geometricorum deficillimorum. Nov. Commentar. Petrop. T. XI, 1765; Aufsätze in den von Gergonne zuerst in Gemeinschaft mit Lavernède herausgegebenen Annales de mathématiques pures et appliquées, 1810–1831. CARNOTS Meisterwerk darf bis auf den heutigen Tag als eine schier unerschöpfliche Fundgrube geometrischer Wahrheiten bezeichnet werden. EULERS Abhandlung ist diejenige, in welcher die später sogenannte *Eulersche Gerade*, d. h. die gerade Linie, auf welcher der Höhenschnittpunkt, der Schwerpunkt und der Mittelpunkt des Umkreises eines ebenen Dreiecks liegen, zum erstenmal vorkommt. Die GERGONNE'sche Zeitschrift war während ihrer verhältnismäßig kurzen Lebenszeit die hervorragendste mathematische Zeitschrift und ist insbesondere für Geometer auch heute noch lesenswert.

I. Die Mittelpunkte der vier Kreise, welche die drei Seiten des Dreiecks $ABC$ berühren, und welche man heute als Innenkreis und als Ankreise zu unterscheiden pflegt, werden durch $S$, bzw. durch $S', S'', S'''$ bezeichnet. Deren Halbmesser heißen $r, r', r'', r'''$; die den Eckpunkten $A, B, C$ gegenüberliegenden Dreiecksseiten heißen $a, b, c$ und $\Delta$ ist der Inhalt des Dreiecks $ABC$. Gleich im § 1 wird gezeigt, daß die Geraden $S'S''$, $S''S'''$, $S'''S'$ der Reihe nach die Punkte $C, A, B$ enthalten, und daß $S'A$, $S''B$, $S'''C$ die in $S$ einander schneidenden Höhen des Dreiecks $S'S''S'''$ sind, bzw. daß $A, B, C$ die Fußpunkte der Höhen des Dreiecks $S'S''S'''$ sind. Neben dieser an der Figur leicht erkennbaren Wahrheit ist bekannt, daß $r = \frac{2\Delta}{a+b+c}$, $r' = \frac{2\Delta}{-a+b+c}$, $r'' = \frac{2\Delta}{a-b+c}$, $r''' = \frac{2\Delta}{a+b-c}$, und nun werden die mannigfachsten Kombinationen dieser Gleichungen vorgenommen, sowohl additiv als multiplikativ. Deren Ergebnisse bilden der Hauptsache nach den Inhalt des ersten Abschnittes.

II. Am Schlusse des ersten Abschnittes wird auf die im § 1 besprochene Beziehung zwischen den Dreiecken $ABC$ und $S'S''S'''$ zurückgegriffen und damit der Übergang zum zweiten Abschnitt gewonnen, d. h. zu den drei Höhen eines Dreiecks und deren Schnittpunkt. Jetzt heißt allerdings das „Elementardreieck", um mit Feuerbach zu reden, nicht $S'S''S'''$, sondern $ABC$, die Höhen heißen $AM$, $BN$, $CP$, der Höhenschnittpunkt wird mit $O$ bezeichnet, und $MNP$ entspricht dem Dreieck $ABC$ des ersten Abschnittes. Das Dreieck $MNP$ empfiehlt sich schon durch eine, wie in einer Fußnote auf S. 15 hervorgehoben wird, seit 1775 bekannte Eigenschaft der Beachtung, es besitzt nämlich unter allen dem Dreieck $ABC$ einbeschriebenen Dreiecken den kleinsten Umfang. Unter Benutzung von aus der Trigonometrie bekannten Formeln gelangt man (S. 19, § 26) zu dem Satze, daß der *Halbmesser des Umkreises von MNP gleich der Hälfte des Halbmessers des Umkreises von* $ABC$ ist. Dieser merkwürdige Zusammenhang wurde, wie Feuerbach in der Voranzeige (S. 588, Fußnote) erklärt, von CHRISTIAN VON STAUDT (1798–1867) entdeckt, welcher damals am Gymnasium zu Würzburg angestellt war. Eine Quelle dieser Angabe ist nicht vorhanden, es will also fast scheinen, als seien Feuerbach und der um zwei Jahre ältere v. Staudt miteinander bekannt gewesen und Feuerbachs Notiz beruhe auf persönlicher Mitteilung. Ein fernerer Satz (S. 23, § 32), der schon bei CARNOT sich finde, sagt aus, daß die Summe $AO + BO + CO$ der Summe der Durchmesser des Innenkreises und des Umkreises des Dreiecks $ABC$ gleich sei, ein weiterer (S. 24. § 35), daß $AO \cdot OM = BO \cdot ON = CO \cdot OP = 2\rho R$, wobei $R$ den Halbmesser des Umkreises von $ABC$, $\rho$ den des Innenkreises von $MNP$ bezeichnet.

III. Aus dem nur drei Seiten füllenden Abschnitt ist etwa der Satz (S. 30, § 45) hervorzuheben, daß in jedem Dreieck der Abstand des Mittelpunktes des Umkreises von irgendeiner Dreiecksseite halb so groß ist als der Abstand des Höhenschnittpunktes von dem dieser Seite gegenüberliegenden Winkelpunkte.

IV. Diesem Abschnitt gehören die beiden wichtigsten Sätze der ganzen Monographie an (S. 37, § 55): *in jedem Dreieck liegen der Mittelpunkt des Umkreises:, der Höhenschnittpunkt und der Mittelpunkt des durch die Höhenfußpunkte gehenden Kreises in einer und derselben Geraden, deren Mitte zugleich der letztgenannte Punkt ist*, und (S. 38, § 56) *der Kreis, welcher durch die Fußpunkte der Perpendikel eines Dreiecks geht, trifft zugleich die Seiten des Dreiecks in ihren Mitten.* Daß die Eulersche Gerade, von welcher § 55 handelt, auch den Schwerpunkt des Dreiecks $ABC$ in sich schließt, wird (S. 39, § 60) hervorgehoben, merkwürdigerweise aber nicht als ein Euler schon bekannter Satz, sondern unter Berufung auf Carnot, dessen Géométrie de position doch erst 20 Jahre nach Eulers Tod erschien.

Um nicht allzu weitläufig zu werden, sei von den beiden letzten Abschnitten von „Die merkwürdigen Punkte“ nur gesagt, daß in V. Beziehungen zwischen den Kreisen auftreten, welche als Innenkreise oder Umkreise von Dreiecken mit irgendwelchen von den bekannt gewordenen Punkten als Eckpunkten erscheinen, daß in VI. entsprechend der Überschrift dieses Abschnittes geometrische, d. h. also nicht trigonometrisch geführte Beweise früherer Sätze zusammengestellt sind. Der 9. und letzte Satz (S. 62) handelt wieder von dem Umkreis des Dreiecks $MNP$ und von dessen Mittelpunkt und Halbmesser.

Da der eben gekennzeichnete Kreis derjenige ist, welchen man als den *Feuerbach*schen *Kreis* zu benennen pflegt, so darf man wohl behaupten, Feuerbach habe selbst die Empfindung besessen, seine Arbeit gipfele in der Erkenntnis, daß es ein und dieselbe Kreislinie sei, auf welcher *sechs Punkte* liegen: die drei Fußpunkte der Höhen des Dreiecks $ABC$ und die Mitten seiner drei Seiten.

Daß auch die Mitten der Strecken $AO, BO, CO$ derselben Kreislinie angehören, welche dadurch vom Sechspunktekreis zum *Neunpunktekreis* wird, finde ich nicht in „Die merkwürdigen Punkte“.

Die bisher besprochene Monographie führt in ihrer Überschrift den Namen einer analytisch-trigonometrischen Abhandlung, und dadurch ist die Methode ihrer Darstellung aufs deutlichste gekennzeichnet. Heutigentags benutzt man zu solchen Untersuchungen mit Vorliebe die Koordinatenmethode, und es sei gestattet, darauf hinzuweisen, daß die Eigenschaften des Neunpunktekreises vielleicht am elementarsten und bequemsten sich ergeben, wenn man eine Dreiecksseite (etwa $BC$) als Abszissenachse, die zugehörige

Höhe ($AM$) als Ordinatenachse wählt. Sucht man dann die Gleichung des durch die drei Seitenmitten gelegten Kreises, so liest sich aus derselben unmittelbar ab, daß der Kreis auch durch $M$ und durch die Mitte von $AO$ hindurchgeht. Läßt man $CA$ und $BN$, dann $AB$ und $CP$ als Koordinatenachsen wählen, so finden sich sofort die noch übrigen vier Kreispunkte.

Einen ganz anderen Charakter als „Die merkwürdigen Punkte" besitzen die drei anderen Schriften: das Manuskript, die Voranzeige, der Grundriß, welche zusammengehören und sich nur durch größere oder geringere Ausführlichkeit der Darstellung unterscheiden. Das Manuskript ist die ausführliche Bearbeitung des Gegenstandes, den die Voranzeige ahnen, läßt, während der Grundriß als vom Verfasser selbst herrührender Auszug zu bezeichnen ist. Ich lege das *Manuskript* meinem Berichte zugrunde. Ich schicke voraus, daß Feuerbach bei der am 7. Juli 1826 vollendeten Niederschrift außer CARNOT, Géométrie de position, auch vielfach die berühmte Abhandlung von LAGRANGE, Solution analytique de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires in den Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres à Berlin 1773, pag. 149–177 (vgl. Gesch. d. Math. IV, 523–525), benutzt hat.

Auf der Innenseite des Umschlags des Manuskripts ist ein Blatt eingeklebt, auf welchem folgendes steht:

> „Dieses Manuskript ist das noch ungedruckte Werk, welches Dr. Karl Wilhelm Feuerbach erwähnt im Vorwort der Druckschrift: Grundriß zu analytischen Untersuchungen der dreieckigen Pyramide von Dr. K. W. Feuerbach, Nürnberg 1827, und auf welches ich in meiner Tetraedrometrie aufmerksam gemacht habe. Das Manuskript ist Eigentum des Herrn Dr. Ludwig Feuerbach, wohnhaft zu Rechenberg bei Nürnberg, der es mir zur Einsicht leihweise, für den Fall aber, daß ich es zum Druck befördern will und kann, als Eigentum überlassen hat. Gotha, den 18. August 1862.
> Dr. Gustav Junghann."

Über Junghann selbst findet sich in der Fortsetzung von POGGENDORFFS Handwörterbuch, III. Band, 1. Abt. (Leipzig 1898), S. 703, nach Originalmitteilungen angegeben, daß er am 28. Juli 1808 in Halberstadt geboren, 1835 Oberlehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Luckau in der Niederlausitz wurde, 1851 aber vom Disziplinarhof in Berlin wegen politischer Opposition abgesetzt wurde und seitdem als Privatmann in Gotha lebte. Die zweibändige Tetraedrometrie erschien 1862–1863. Weiteres ist mir nicht bekannt geworden. Die Drucklegung der Feuerbachschen Schrift ist JUNGHANN augenscheinlich nicht gelungen, sonst wäre das Manuskript nicht wieder in den Besitz der Familie Feuerbach zurückgelangt.

Das Manuskript beginnt mit einer sieben Seiten füllenden Einleitung, nach welcher ein auf zwei Seiten ausgedehntes Inhaltsverzeichnis folgt. Aus der Einleitung hebe ich nur einen Satz hervor: Wenn die vier Perpendikel einer dreieckigen Pyramide einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben, so ist der Halbmesser der Kugel, deren Oberfläche durch die Fußpunkte dieser Perpendikel geht, gleich einem Drittel vom Halbmesser der um die Pyramide beschriebenen Kugel. Jene erstgenannte Kugel ist das räumliche Analogen des Feuerbachschen Kreises in der Ebene. Der eigentliche Inhalt zerfällt in drei Teile.

*Erster Teil. Analysis der dreieckigen Pyramide durch die Methode der Koordinaten und Projektionen.*

*I. Abschnitt. Die Relationen zwischen dem Inhalt der dreieckigen Pyramide, den zwölf rechtwinkligen Koordinaten ihrer Ecken und den Projektionen ihrer Kanten und Seitenflächen auf die Achsen und Ebenen eines rechtwinkligen Koordinatensystems*, § 1–26.

*II. Abschnitt. Berechnung der Dimensionen an der dreieckigen Pyramide aus den zwölf rechtwinkligen Koordinaten, ihrer Ecken und Elimination der Koordinaten*, § 27–80.

In sprachlicher Beziehung sei bemerkt, daß Feuerbach Größen *durch*einander, nicht *mit*einander multipliziert, und daß er von *gegenüberliegenden Kanten* der dreieckigen Pyramide $ABCD$ redet. Er versteht darunter solche, in welchen jeder der vier Eckbuchstaben einmal und nur einmal vorkommt, also $AB$ und $CD$, $AC$ und $BD$, schließlich $AD$ und $BC$. Abkürzend möge es hier gestattet sein, solche Kanten *Gegenkanten* zu nennen, wie es Feuerbach übrigens auch mitunter tut. Endlich ist auf den Sprachgebrauch *koordinierte Ebenen* für *Koordinatenebenen* zu achten.

Der ganze erste Teil enthält kaum Neues. Es finden sich in ihm vereinigt die einfachsten Sätze der analytischen Geometrie des Raumes, die von Graden und Ebenen und von dabei auftretenden Winkeln handeln. Überall ist symmetrische Schreibweise beabsichtigt und auch meistens erreicht, soweit sie ohne Anwendung von Determinanten möglich ist. Volle Übersichtlichkeit ist aber natürlich ohne dieses 1826 noch nicht zur Verfügung stehende Hilfsmittel nicht zu erreichen gewesen. Die Schlußaufgabe (§ 80) verlangt aus den Abständen eines Punktes von drei durch ihre Koordinaten gegebenen Punkten seine eigenen Koordinaten zu finden.

Geschichtlich interessant ist § 44. Er besagt, daß, wenn drei Seitenflächen einer Pyramide zueinander senkrecht stehen, die Summe ihrer Quadrate dem Quadrat der vierten Seitenfläche gleich ist, und stellt sich so als stereometrisches Analogon zum Pythagoreischen Lehrsatz dar. Nun berichtet Feuerbach, Tinseau (Mém. présentés. T. IX) habe diesen Satz als neu veröffentlicht, De Gua habe ihn dann (Mém. de l'académie des sciences. Paris 1783) für sich in Anspruch genommen. Beiden sei unbekannt gewesen, daß schon Johann Faulhaber im Besitze des Satzes war, den er sowohl in seiner Schrift Miraculosum Arithmeticorum, fol. 74–75, als in der Ingenieur-Schule I, 153, Frankfurt 1630, bekannt machte.

Ganz anderer Natur als der erste Teil ist aber dann:

*Zweiter Teil.* *Die Theorie der koordinierten Koeffizienten, eine neue Methode, welche die Raumgrößen in Beziehung auf eine Urpyramide betrachtet.*

*I. Abschnitt.* *Vom Punkte im Raume in Beziehung auf eine Urpyramide und von den vornehmsten Relationen zwischen den koordinierten Koeffizienten zweier Punkte im Raume.* § 81–88.

*II. Abschnitt.* *Die gerade Linie, das ebene Dreieck und die Pyramide in Beziehung auf eine Urpyramide.* § 89–105.

*III. Abschnitt.* *Berechnung einiger der vornehmsten Dimensionen, welche drei beliebige, auf eine Urpyramide bezogene Punkte mit derselben bestimmen.* § 106 bis 127.

Hier sind ganz neue, im Jahre 1826 in der Öffentlichkeit noch unbekannte Wege betreten, zu welchen § 81 den Zugang eröffnet: ***Wenn man den Abstand jedes fünfer beliebiger Punkte im Raume von einer und der nämlichen beliebigen Ebene in den Inhalt derjenigen dreieckigen Pyramide multipliziert, welche die vier übrigen Punkte bestimmen, so ist die algebraische Summe dieser fünf Produkte gleich Null.***

Feuerbach selbst hat diesen Satz als den grundlegenden seiner ganzen Untersuchung erkannt und ihn eben deshalb sowohl in der Voranzeige (S. 569) als in dem Grundriß (S. 5) besonders betont. Ihm zur Seite steht alsdann die Definition des § 82: Sei eine *Urpyramide* mit den Seitenflächen $\Delta, \Delta', \Delta'', \Delta'''$ gegeben. Die Abstände eines Punktes $E$ von diesen vier Seitenflächen haben zu den Abständen derselben Seitenflächen von den einer jeden gegenüberliegenden Eckpunkten der Urpyramide Verhältnisse $o, l, n, m$, welche *koordinierte Koeffizienten des Punktes $E$* oder schlechtweg seine *Koeffizienten* heißen, während $o + l + n + m = 1$ ist. So entsteht die Aufgabe, *die Beziehungen zwischen den $x, y, z$ und den $l, m, n, o$ eines Punktes $E$ zu finden*, an welche im II. und III. Abschnitte des zweiten Teiles zahlreiche andere Aufgaben sich anreihen. Von ihnen ist in der Voranzeige keine Rede, so daß der Leser der Isis zwar mit dem grundlegenden Theoreme der ganzen Untersuchung bekannt wurde, von dessen Anwendungsart aber so gut wie gar nichts erfuhr. Anders war die Sachlage bei den Lesern des Grundrisses, aber diese Leser waren sicherlich sehr dünn gesät. Hatte doch der Grundriß keinen Verleger gefunden und war nur in Kommission bei Riegel und Wiesner erschienen, eine Druckart, welche fast zu jeder Zeit, als gleichbedeutend mit „als Makulatur gedruckt“ zu betrachten war. Die einzelnen, oben erwähnten Aufgaben sind:

§ 90. Aus den Koeffizienten zweier Punkte ihren Abstand zu finden.

§ 91. Aus den Koeffizienten zweier Punkte die Gleichung der sie verbindenden Geraden zu finden.

§ 92. Von jeder zweier beliebigen geraden Linien sind die Koeffizienten irgend zweier in ihr befindlichen Punkte gegeben. Man soll den Winkel, welchen sie miteinander bilden, bestimmen.

§ 93. Aus den Koeffizienten dreier Punkte die Inhalte der Projektionen des durch sie bestimmten ebenen Dreiecks auf die koordinierten Ebenen zu bestimmen.

§ 94. Aus den Koeffizienten dreier Punkte den Inhalt des durch sie bestimmten ebenen Dreiecks zu berechnen.

§ 95. Aus den Koeffizienten dreier Punkte die Gleichung der durch sie bestimmten Ebene zu finden.

§ 96. Von jeder zweier beliebigen Ebenen sind die Koeffizienten dreier in ihr befindlicher Punkte gegeben, man sucht den Winkel der beiden Ebenen miteinander.

§ 97. Aus den Koeffizienten vier beliebiger Punkte den Inhalt der durch sie bestimmten dreieckigen Pyramide zu berechnen.

§ 98–104 ist eine Menge von Gleichungen zwischen dem Inhalt der Urpyramide und dem einer beliebig gegebenen Pyramide hergeleitet.

§ 100. Aus den Koeffizienten vierer Punkte den kürzesten Abstand zweier Gegenkanten der durch sie bestimmten dreieckigen Pyramide zu finden.

Nachdem im III. Abschnitt des zweiten Teils in § 106 gelehrt ist, aus den Koeffizienten eines beliebigen Punktes seine Abstände von den Ecken der Urpyramide zu berechnen, zieht Feuerbach aus den ermittelten Gleichungen weitere Folgerungen, die zu dem Satze führen:

§ 110. Um einen beliebig gegebenen Mittelpunkt ist mit einem beliebig gegebenen Halbmesser eine Kugel beschrieben. Wenn man nun das Quadrat des Abstandes jeder Ecke der Urpyramide von einem beliebigen Punkte in der Oberfläche dieser Kugel mit dem oben dieser Ecke zugeordneten Koeffizienten des Mittelpunktes der Kugel multipliziert, so ist die algebraische Summe dieser vier Produkte eine konstante Größe.

§ 111 gibt einen Sonderfall des vorhergehenden Satzes, indem die der Urpyramide umschriebene Kugel in Frage tritt.

§ 112 löst die Aufgabe, aus den Koeffizienten eines Punktes die Gleichungen der vier Geraden herzustellen, welche durch ihn und jede Ecke der Urpyramide hindurchgehen und auch die Durchschnittspunkte dieser Geraden mit den Seitenflächen der Urpyramide zu bestimmen.

§ 113. Aus den Koeffizienten eines Punktes die Winkel zu berechnen, welche seine Verbindungsgeraden mit den Ecken der Urpyramide mit deren Kanten bilden.

§ 114. Die gleiche Aufgabe mit Bezug auf die Winkel, welche jene Geraden mit den Seitenflächen der Urpyramide bilden.

§ 115. Aus den Koeffizienten eines Punktes die Inhalte der ebenen Dreiecke zu bestimmen, welche er mit je zwei Ecken der Urpyramide bildet. Dadurch ist zugleich der Abstand des Punktes von den Kanten der Urpyramide bekannt.

§ 116. Durch einen gegebenen Punkt und eine von zwei Gegenkanten der

Urpyramide ist eine Ebene gelegt. Man soll aus den Koeffizienten des Punktes den Winkel berechnen, welchen die Ebene mit der anderen Gegenkante bildet.

§ 117. Durch einen gegebenen Punkt und jede Kante der Urpyramide ist eine Ebene gelegt. Man soll aus den Koeffizienten des Punktes die Winkel berechnen, welche diese sechs Ebenen mit den Ebenen der Urpyramide bilden.

§ 118. Durch einen gegebenen Punkt und jede zweier Gegenkanten der Urpyramide ist eine Ebene gelegt. Man soll aus den Koeffizienten des Punktes den Winkel der beiden Ebenen berechnen.

§ 119. Aus den Koeffizienten eines Punktes die Lage und Größe der drei Geraden zu finden, welche von ihm ausgehend je zwei Gegenkanten der Urpyramide schneiden.

§ 120. Aus den Koeffizienten zweier Punkte sollen die Winkel gefunden werden, welche ihre Verbindungsgerade mit den Kanten der Urpyramide bildet.

§ 121. Die Winkel zu finden, welche jene Verbindungsgerade mit den Seitenflächen der Urpyramide bildet.

§ 122. Die Winkel zu finden, welche die durch zwei gegebene Punkte und eine Ecke der Urpyramide gelegte Ebene mit der Ebene der dieser Ecke gegenüberliegenden Seitenfläche der Urpyramide bildet.

§ 123. Aus den Koeffizienten zweier gegebener Punkte die Inhalte der sechs Pyramiden, welche jene Punkte mit je zwei Ecken der Urpyramide bestimmen, zu finden.

§ 124–126. Aus den Koeffizienten dreier gegebener Punkte die Winkel zu finden, welche deren Ebene mit den Kanten und mit den Seitenflächen der Urpyramide bilden, sowie auch den Inhalt der Pyramiden, welche sie mit jeder Ecke der Urpyramide bestimmen.

§ 127. Aus den Koeffizienten eines Punktes die Gleichungen der vier durch ihn zu den Seitenflächen der Urpyramide parallel gelegten Ebenen und die Inhalte der in diesen ausgeschnittenen Dreiecke zu finden.

Damit ist der zweite Teil abgeschlossen, und nun folgt:

*Dritter Teil. Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte der dreieckigen Pyramide und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren.*

Gerade in diesem Teil ist der mit Feuerbachs geometrischer Eigenart vertraute Leser berechtigt, hochinteressante Entdeckungen zu erwarten, aber auf das Titelblatt folgt ein anderes folgenden Inhaltes:

Aus diesem noch unvollendeten Teile unserer Untersuchungen, welcher in folgende Abschnitte

1. von der Relation zwischen den zehn Abständen fünf beliebiger Punkte im Raume zueinander,

2. von den Perpendikeln der Pyramide,

3. von der Kugel, welche um die Pyramide beschrieben ist,

4. von den Kugeln, welche die vier Seitenflächen der Pyramide berühren,
5. von den Kugeln, welche je vier Kanten der Pyramide berühren,
6. von den Kugeln, welche Seitenflächen und Kanten der Pyramide berühren,
7. vom Schwerpunkte des körperlichen Raumes der Pyramide,
8. von den merkwürdigen Punkten der Seitenflächen der Pyramide,
9. Bestimmung der gegenseitigen Lage der vornehmsten bisher betrachteten Punkte,
10. Untersuchung einiger besonderen Pyramiden,
11. vermischte, die Pyramide betreffende Probleme

zerfallen und einen ziemlich ausgedehnten Umfang erreichen wird, sehen wir uns veranlaßt, einige der vornehmsten Resultate mit der Bemerkung auszuheben, daß der Schlüssel zu ihrer Auffindung in dem bisher Vorgetragenen zu finden ist.

Nach dieser Vorbemerkung, welche den dritten Teil als bloßes Bruchstück bezeichnet, folgen unter der Bezeichnung I.–XV. recht verschiedenartige Dinge.

I. erklärt die Bezeichnungen, von welchen Gebrauch gemacht werden will. $SS'S''S'''$ ist eine Pyramide, $\Delta$ die der Spitze $S$ gegenüberliegende Seitenfläche, $G$ bedeutet deren Schwerpunkt, $U$ den Mittelpunkt ihres Umkreises mit dem Halbmesser $u$; $V$, bzw. $v$ und $W$, bzw. $w$ sind die Mittelpunkte und Halbmesser des Innenkreises und des Feuerbachschen Kreises; $M$ ist der Höhenschnittpunkt. Beziehen sich alle diese Buchstaben auf die Seitenfläche $\Delta$, so gelten genau die gleichen Buchstaben einmal, zweimal, dreimal bestrichelt, z. B. $\Delta'$, $\Delta''$, $\Delta'''$, für die anderen Seitenflächen. Daran schließt sich die Angabe der Koordinaten der $V, U, W$.

II. gibt, den Inhalt der Pyramide $VV'V''V'''$.

III. gibt die Bedingungen an, unter welchen gewisse Gerade einen gemeinsamen Durchschnittspunkt haben, z. B. die Geraden $ES$, wo $E$ der Seitenfläche $\Delta$ angehört. Besonders hervorgehoben sind die Fälle der Übereinstimmung von $E$ mit $V$, mit $U$, mit $W$.

IV. Durch $P$ ist der in $\Delta$ liegende Fußpunkt der Senkrechten $SP$ zu $\Delta$ bezeichnet. Dann werden die Bedingungen erörtert, unter welchen $P$ mit $V, G, U, M$ zusammenfällt.

V. Die Spitze $S$ gehört einer Kugeloberfläche an, deren Mittelpunkt auf der Ebene $\Delta$ liegt. Wenn nun dieser Mittelpunkt in $G$, in $V$, in $U$ liegt, so folgen daraus verschiedene Sätze.

VI. Aus den Abständen eines Punktes $E$ von den Ecken, einer Pyramide folgt sein Abstand von dem Mittelpunkte der der Pyramide umschriebenen Kugel.

VII. Sätze über den Schwerpunkt des körperlichen Raumes einer Pyramide und über den ihres Umfanges verglichen mit den entsprechenden Sätzen beim ebenen Dreieck.

VIII. Sätze über die geringsten gegenseitigen Abstände der vier Höhen $p, p', p'', p'''$ einer Pyramide voneinander.

IX. Von der Innenkugel und von den vier Ankugeln einer Pyramide.

X. Von den Bedingungen eines gemeinschaftlichen Höhenschnittpunktes bei einer Pyramide. Von dieser Aufgabe ist in der Voranzeige, S. 568, die Rede, wo als Bedingung ausgesprochen ist $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

XI. Es gibt innerhalb der Pyramide einen Punkt von der Beschaffenheit, daß, wenn man durch ihn zu den Ebenen der Seitenflächen parallele Ebenen legt, die Inhalte der ebenen Dreiecke, welche in ihnen jedesmal von den drei übrigen Seitenflächen ausgeschnitten werden, alle einander gleich sind.

XII. Über die Berührung von vier beliebigen Kugeln durch eine fünfte, eine Aufgabe, mit welcher Carnot, Géométrie de Position, Nr. 357, sich beschäftigte, ohne die quadratische Gleichung, von welcher ihre Auflösung abhängt, wirklich aufzustellen.

XIII. gibt eine andere Form von VI.

XIV. In Carnot, Géométrie de position, Nr. 305, ist der Radikalmittelpunkt dreier in der Ebene einander schneidender Kreise nachgewiesen. Ähnliche Sätze gelten für einander schneidende Kugeln. Das Manuskript hat darüber keine ausführlichen Angaben, aber im Grundriß, S. 22–23, sind die beiden Sätze ausgesprochen: Wenn drei Kugeln einander schneiden, so schneiden die drei Durchschnittsebenen derselben einander in einer und der nämlichen geraden Linie. Wenn vier Kugeln einander schneiden, so schneiden sich auch ihre vier gemeinschaftlichen Sehnen in einem und dem nämlichen Punkte.

XV. Aus einem Punkte $o, l, n, m$ werden nach den vier Ecken der Urpyramide Grade gezogen, welche die jenen Ecken gegenüberliegenden Seitenflächen in je einem Punkte schneiden. Der Rauminhalt der durch diese vier Schnittpunkte bestimmten Pyramide läßt sich mittels $o, l, n, m$ mit Zuziehung des Rauminhaltes der Urpyramide berechnen.

Die hier in ziemlicher Ausführlichkeit gegebene Inhaltsanzeige des Manuskripts läßt begreiflich erscheinen, daß man umsonst nach einem Verleger für dasselbe suchte. Es war im Grunde doch nur ein Bruchstück, welches man ihm anbieten konnte, und was davon von hervorragender Wichtigkeit sein konnte, das war inzwischen kein neuer Gedanke mehr.

Der kundige Leser meines Berichtes weiß, daß ich das meine, was Feuerbach die *vier Koeffizienten eines Punktes* genannt hat, und was nichts anderes ist, als dessen heute sogenannte *Tetraederkoordinaten*. Als ihr Erfinder gilt *August Ferdinand Möbius* (1790–1868), und in der Tat finden sich sowohl die Dreieckskoordinaten in der Ebene als die Tetraederkoordinaten im Raum in dessen Werk: *Der baryzentrische Kalkul, ein neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie*. Leipzig 1827. Es kann keinem Zweifel unterworfen sein, daß Möbius und Feuerbach gleich unabhängige Erfinder waren. Keine Möglichkeit läßt sich dafür ausdenken, daß der eine von ihnen unmittelbar oder mittelbar von den gleichzeitigen Arbeiten des anderen Kenntnis erlangt haben könnte. Hier ist also einer der so seltenen Fälle vorhanden, daß gleichzeitig zwei Schriftsteller auf den gleichen wichtigen Gedanken kamen, ohne voneinander zu wissen! Die Mathematik selbst hat also durch das Verhängnis, welches Feuerbachs Manuskript ungedruckt, seinen Grundriß unbeachtet bleiben ließ, keine wesentliche Einbuße erlitten, aber die Geschichte der Mathematik wird mehr, als man es bisher annahm, des Namens von *Karl Wilhelm Feuerbach* eingedenk sein müssen.